Leçon 264 : Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.

Développements :

Processus de Galton-Watson, Théorème de Weierstrass par les probabilités.

Bibliographie :

Ouvrard, Candelpergher, Barbe Ledoux.

Rapport du jury :

Le jury attend des candidats qu'ils rappellent la définition d'une variable aléatoire discrète et que des lois usuelles soient présentées, en lien avec des exemples classiques de modélisation. Le lien entre variables aléatoires de Bernoulli, binomiale et de Poisson doit être discuté. Il peut être d'ailleurs intéressant de mettre en avant le rôle central joué par les variables aléatoires de Bernoulli. Les techniques spécifiques aux variables discrètes, notamment à valeurs entières, devront être mises en évidence, comme par exemple la caractérisation de la convergence en loi, la notion de fonction génératrice. Pour aller plus loin, le processus de Galton-Watson peut se traiter intégralement à l'aide des fonctions génératrices et cette voie a été choisie par plusieurs candidats : cela donne un développement de très bon niveau pour ceux qui savent justifier les étapes délicates. Pour aller beaucoup plus loin, les candidats pourront étudier les marches aléatoires, les chaînes de Markov à espaces d'états finis ou dénombrables, les sommes ou séries de variables aléatoires indépendantes.

1 Variables aléatoires discrètes

1.1 Variables discrètes

Définition 1 (Ouvrard 1 p20)**.** *Soit $(\Omega, A, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et soit E un ensemble. Une application $X : \Omega \to E$ est une variable aléatoire discrète si $X(\Omega)$ est dénombrable et si $X^{-1}(\{x\}) \in A \ \forall x \in E$. On définit alors la loi de probabilité de X par : $x \in E \to \mathbb{P}(X = x) \in [0, 1]$.*

Exemple 2 (Ouvrard 1 p21)**.** *Probabilité qu'en jetant 6 dés équilibrés et discernables, toutes les faces exhibent un chiffre différent.*

Remarque 3. *Pour X_1, X_2 des v.a. discrètes à valeurs dans $\mathbb{R}$, $X_1 + \lambda X_2$ et $X_1.X_2$ sont encore des v.a. discrètes.*

1.2 Lois usuelles

Définition 4 (Ouvrard 1 p16)**.** *Loi uniforme.*

Exemple 5 (Ouvrard 1 p16)**.** *Probabilité d'obtenir k fois le chiffre 6 sur n lancers d'un dé équilibré.*

Exemple 6. *Pour un lancer de dé non pipé, la v.a. X égale au chiffre obtenu suit une loi uniforme sur $\{1, .., 6\}$.*

Définition 7 (Ouvrard 1 p243)**.** *Loi de Bernoulli.*

Exemple 8. *Le jet d'une pièce équilibrée se modélise avec une loi de Bernouilli de paramètre $p = 1/2$.*

Définition 9 (Ouvrard 1 p17)**.** *Loi binomiale.*

Exemple 10 (Candel p83)**.** *Pour une urne contenant m boules (l noire, $n-l$ blanches), et si l'on tire au hasard avec remise n boules, le nombre de boules noires tirées suit une loi $Bin(n, l/m)$.*

Définition 11 (Ouvrard 1 p17)**.** *Loi de Poisson.*

Exemple 12. *C'est la loi de v.a. décrivant l'apparition d'évènements rares, nombres d'accidents, d'erreurs de fabrication, d'individus atteints d'une maladie.*

Il s'agit d'une loi modélisant un nombre d'occurrences d'un événement sur une durée fixée.

Théorème 13. *Evénements rares de Poisson. (Ici ?)*

Définition 14 (Ouvrard 1 p17)**.** *Loi géométrique.*

Exemple 15. *Pour une épreuve aléatoire à deux issues de probabilité de succès p, le nombre d'échecs avant le premier succès suit une loi binômiale de paramètre p.*

Définition 16. *Loi hypergéométrique.*

Exemple 17 (Candel p83)**.** *Une urne contient N boules dont M blanches, et on tire n boules sans remise. La v.a. X égale au nombre de boules blanches obtenues suite une loi $H(n, M, N)$.*

Remarque 18. *Interprétation de ces lois Ouvrard 1 p243.*

Exemple 19 (Ouvrard p18)**.** *Poissons.*

1.3 Espérance, variance

Définition 20 (Ouvrard 1 p115)**.** *Espérance d'une variable aléatoire discrète.*

Exemple 21 (Ouvrard 1 p243)**.** *Donner les espérances des lois usuelles.*

Exemple 22 (Ouvrard 1 p117). $E[a] = a$.
Si X est bornée alors X admet une espérance.
Espérance d'une fonction indicatrice.

Remarque 23 (Ouvrard p117). *Si l'ensemble des x tels que $\mathbb{P}(X = x) > 0$ est borné dans $\mathbb{R}$, alors l'espérance de X est finie. Cela est en particulier vrai si un tel ensemble est fini.*

Contre exemple 24. *X suit $6/\pi^2 \sum_{k\geq 0} \delta_k/k^2$ est d'espérance infinie.*

Théorème 25 (Ouvrard 1 p118). *Théorème de transfert.*

Proposition 26. *Inégalité de Markov.*

Définition 27 (Ouvrard 1 p122). *Pour $p \geq 1$, une v.a. discrète réelle X admet un moment d'ordre p si et seulement si X^p est d'espérance finie. On définit alors $E[X^p]$ le moment d'ordre p de X.*

Définition 28 (Ouvrard 1 p127). *Soit X une v.a. réelle discrète possédant un moment d'ordre 2. Alors X est d'espérance finie et la v.a. $X - E[X]$ possède un moment d'ordre 2. On définit alors $var(X) := E[(X - E[X])^2]$, et on a $var(X) = E[X^2] - E[X]^2$.*

Remarque 29 (Ouvrard 1 p127). *Avec le théorème de transfert, expression de la variance.*

Exemple 30 (Ouvrard 1 p243). *Exemples de variances.*

Proposition 31. *Inégalité de Bienaymé Tchebychev.*

2 Variables aléatoires discrètes indépendantes

2.1 Indépendance

Définition 32 (Ouvrard 1 p58). *: Deux v.a. discrètes X_1, X_2 à valeurs dans des ensembles E_1, E_2 sont dites indépendantes si $\forall A \in P(E_1), \forall A' \in P(E_2)$, on a $\mathbb{P}(\{X_1 \in A\} \cup \{X_2 \in A'\}) = \mathbb{P}(X_1 \in A).\mathbb{P}(X_2 \in A')$.*

Remarque 33. *Cette notion se généralise à une famille quelconque de variables aléatoires.*

Proposition 34 (Ouvrard 1 p59). *Caractérisation de l'indépendance mutuelle de X_i.*

Remarque 35. *Mutuellement indépendantes implique deux à deux indépendantes mais la réciproque est fausse.*

Exemple 36 (Candel p156).

2.2 Somme de variables aléatoires discrètes indépendantes

Proposition 37 (Ouvrard 1 p62). *Loi de $X_1 + X_2$.*

Exemple 38 (Ouvrard 1 p64). *Somme de deux variables aléatoires de Poisson indépendantes.*

Exemple 39 (Ouvrard 1 p70). *Loi de la somme de n lois de Bernoulli iid.*

Théorème 40. *Théorème de Weierstrass par les polynômes de Bernstein.*

Définition 41. *Fonctions caractéristique.*

Proposition 42. *Elle caractérise la loi.*

Proposition 43 (Candel p168). $\phi_{X+Y} = \phi_X \phi_Y$.

Exemple 44. *Somme de binomiales, de Bernoulli.*

3 Fonctions génératrices (variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$)

Définition 45 (Candel p219). *[Ouvrard 1 p138] Fonction génératrice. Soit X une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour tout $s \in]-1, 1[$, la variable aléatoire s^X est bien définie et d'espérance finie.*

On note, quand cette quantité existe, $G_X(s) := E[s^X]$ la fonction génératrice de X, qui est au moins définie sur $]-1, 1[$.

Proposition 46 (Ouvrard 1 p139). *Propriétés des fonctions génératrices.*

Exemple 47 (Ouvrard 1 p139). *Fonctions génératrices d'une loi binomiale, d'une loi de poisson.*

Exemple 48 (Cottrel). *On ne peut pas truquer deux dés indépendants de sorte que la somme de leurs chiffres suive une loi uniforme.*

Proposition 49 (Ouvrard 1 p140). *G_{X+Y} si X et Y sont indépendantes.*

Proposition 50 (Ouvrard 1 p141). *Caractérisation d'un moment d'ordre r en fonction des fonctions génératrices.*

Proposition 51. *Processus de Galton-Watson.*

4 Théorèmes limites et approximations

4.1 Approximation de la loi de Poisson

Définition 52 (Barbe). *Convergence en loi.*

Proposition 53 (Barbe p131)**.** *Si $(X_n)_n, X$ sont des v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors la suite $(X_n)_n$ converge en loi vers X si et seulement si $\forall m \geq 0, \mathbb{P}(X_n = m) \to \mathbb{P}(X = m)$.*

Remarque 54. *Cette propriété reste vraie si les X_n et X sont à valeurs dans un ensemble H pour lequel tout point x n'est pas dans l'adhérence de $H - \{x\}$.*

Théorème 55 (Ouvrard 1 p226)**.** *Soit $(S_n)_n$ une suite de v.a. de loi $Bin(n, p_n)$. Si np_n converge vers un $\lambda > 0$, alors S_n converge en loi vers une v.a. de Poisson de paramètre λ, ie $\mathbb{P}(S_n = m) \to e^(-\lambda)\lambda^m/m!$.*

Remarque 56 (Ouvrard 1 p227)**.** *Dans le cas où p est assez petit, on peut approximer une v.a. de loi $Bin(n, p)$ par P_{np}.*

Exemple 57 (Ouvrard 1 p227)**.** *La loi de la variable aléatoire S_n associée au nombre de personnes nées le premier Janvier dans un ensemble de n personnes prises au hasard est $Bin(n, 1/365)$. Pour n au moins de l'ordre de 400, on peut approcher la valeur de $\mathbb{P}(S_n = k)$ par $e^{-n/365}(n/365)^k/k!$.*

Parmi 500 personnes, le nombre de personnes nées le 1er janvier suit une loi $P(500/365)$.

4.2 Loi des grands nombres et théorème central limite

Théorème 58 (Ouvrard 2 p108)**.** *Loi faible des grands nombres (Kintchine).*

Application 59 (Ouvrard 2 p108)**.** *Théorème de Bernoulli.*

Théorème 60 (Ouvrard 2 p111)**.** *Loi forte des grands nombres.*

Application 61. *La moyenne empirique $\overline{X_n} := (X_1 + .. + X_n)/n$ permet ainsi d'estimer $E[X_1]$ de façon consistante.*

Théorème 62 (Bernis)**.** *Théorème central limite.*

Application 63 (Ouvrard 1 p228)**.** *[Bernis] Théorème de Moivre Laplace global.*

Exemple 64 (Ouvrard 1 p230)**.** *Probabilité que le nombre 6 soit entre 1800 et 2100 fois sur 12000 lancers d'un dé équilibré.*